**В. В. Кіндратишин**

**(Дрогобич, Україна)**

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ**

У кінці XVII — на початку XVIII ст. різноманітні практичні і наукові проблеми привели до появи диференціальних рівнянь. Насам­перед це були диференціальні рівняння першого порядку, інтегруван­ня яких намагалися здійснити за допомогою функцій, що виражають скінченне число алгебраїчних дій або таких, що включають елементарні неалгебраїчні дії, наприклад оперування тригонометричними функ­ціями.

Найпростіші диференціальні рівняння з'явилися вже в працях Ісаака Ньютона (1643—1727) і ГотфрідаЛейбніца(1646—1716). Саме Лейбніцу і належить термін «диференціальне рів­няння». Диференціальні рівняння мають велике прикладне значення, вони є знаряддям дослідження багатьох задач природознавства і тех­ніки. Їх широко використовують в механіці, астрономії, фізиці, у ба­гатьох задачах хімії, біології. Це пояснюється тим, що досить часто об'єктивні закони, яким підпорядковуються певні явища (процеси), записують у формі диференціальних рівнянь, а самі ці рівняння є за­собом для кількісного вираження цих законів.

Наприклад, фізичні закони описують деякі співвідношення між ве­личинами, що характеризують певний процес і швидкість зміни цих величин. Іншими словами, ці закони виражаються рівностями, в яких є невідомі функції та їх похідні.

У XVIII ст. теорія диференціальних рівнянь відокремилася з ма­тематичного аналізу в самостійну математичну дисципліну, її успіхи пов'язані з іменами швейцарського вченого Іоганна Бернуллі (1667—1748), французького математика Жозефа Лагранжа (1736—1813) і особливо Леонарда Ейлера.

Перший період розвитку диференціальних рівнянь був пов'язаний з успішним розв'язуванням деяких важливих прикладних задач, що при­водять до диференціальних рівнянь, розробкою методів інтегрування різних типів диференціальних рівнянь і пошуком класів рівнянь, роз­в'язки яких можна подати у вигляді елементарних функцій або їх пер­вісних. Проте дуже швидко виявилося, що інтегрованих диференціаль­них рівнянь зовсім небагато. Це привело до розвитку власне теорії диференціальних рівнянь, яка займається розробкою методів, що дають змогу за властивостями диференціального рівняння визначити властивості і характер його розв'язку.

У зв'язку з потребами практики поступово розроблялися і спосо­би наближеного інтегрування диференціальних рівнянь. Ці методи дають зручні алгоритми обчислень з ефективними оцінками точності, а сучасна обчислювальна техніка дає змогу економічно і швидко звести розв'язування кожної такої задачі до числового результату.

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

*y’(x) = ky(x)* (1)

де *k*– постійна, а *y(x)* – шукана функція.

Рівняння (1)називається рівнянням показникового росту. Воно має такий зміст:для кожного значення аргументу, швидкість зміни функції пропорційна значенню даної функції*.*

Для того, щоб знайти розв’язки рівняння (1),можна поступити наступним чином. Нехай *y(x)-* деякий розв’язок, це означає, що *y’(x) – ky(x)= 0* вірно. Помноживши обидві частини рівності на відмінний від 0 множник *e-kx,* отримаємо вірну рівність

*e-kx y’(x) – e-kxky(x) = 0*  (2)

Так як *(e-kxy(x))’ = e-kxy’(x) – ke-kxy(x),* то рівність (2)можна записати так

*(e-kxy(x))’ = 0,*

звідки *e-kxy(x) = C,* або

*y(x)=Cekx,* (3)

де *C* – деяка довільна постійна.

Отже, тільки функції вигляду (3)можуть бути розв’язками рівняння показового росту (1).Безпосередня підстановка в рівняння (1) показує, що при будь-якій постійній *C*функція (3)є розв’язком рівняння (1). Таким чином, формула (3) визначає множину розв’язківрівняння (1).

Для того, щоб із знайденої множини розв’язків(3) відокремити частковий розв’язок, потрібно знати константу *C*. Для цього потрібні додаткові умови – так названі *початкові умови*; в даному випадку достатньо знати значення шуканої функції при деякому значенні аргументу:

*y(x0)=y0* (4)

Підставивши початкову умову (4)в розв’язок рівняння (3), знайдемо *y0=Cekx0,* звідки *C=y0e-kx0*. Підставивши це значення *C*в формулу(3), отримаємо розв’язок рівняння показового росту, яке задовольняє задано ній початковій умові (4):

*y(x) = y0ek(x-x0).* (5)

Ми бачимо, що постійна *C* по початковій умові (4) визначається однозначно; ось чому розв’язок (5), який задовольняє даній початковій умові буде єдиним.

**Приклад.** *Розв’язати рівняння y’(x) = 3y(x),* якщо *y(0) = 2.*

Тут *k*=3, *x0=0, y0=2;* розв’язання можна записати за формулою (5):*y(x)=2e3x*. Це буде єдиний розв’язок, який задовільняє задану початкову умову. При розв’язування задач потрібно спочатку скласти диференціальне рівняння, указати початкову умову, а потім розв’язати рівняння. При складанні рівняння звичайно використовують відомі з курсів фізики та хімії закони.   
Швидкість прямолінійного руху.  
З другого закону Ньютона  
 (6)

де *a –* це прискорення руху матеріальної точки маси *m*, *F*– результуюча всіх сил, діючих на матеріальну точку.

Швидкість руху *v(t)* і прискорення *a(t)* являються функціями від часу *t*, також, як відомо*v’(t) = a(t)*. Помітимо, що дії над векторами, які проведені вздовж однієї прямої, на якій вибрано додатній напрям можна замінити на дії над їхніми проекціями на цю ж саму пряму. Таким чином, у випадку руху матеріальної точки вздовж осі *Ox* рівність(6) може бути заміненим рівністю

*mv’(t) = F,* (7)

де через *v’(t)* і *F* позначені відповідно проекції векторів і на цю вісь. Рівняння (7)описує також і поступальний рух тіла. Такий рух можна розглядати як рух матеріальної точки, яка розташована в центрі мас тіла, під дією сил, прикладених до центру мас.

Задача.Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю 5 м/с. На повному ходу її мотор був вимкнутий; через 4 с її швидкість стала рівної 1 м/с. Вважаючи, що сила опору води пропорційна швидкості руху човна, визначити, через скільки секунд після вимкнення мотора швидкість зменшиться до 4м/с?

Розв’язання. Будемо вважати, що човен рухається прямолінійно. Направимо вісь *Ох* вздовж руху човна. Позначимо через *v(t)* швидкість руху човна в момент часу *t* після вимкнення мотора. В момент вимкнення мотора *(t=0)* швидкість, за умовою, дорівнює 5 м/с, або

*v* (0) =5. (8)

Це – початкова умова задачі. Складемо диференціальне рівняння. Нехай маса човна дорівнює *m*. За умовою, начовен,що рухається діє сила *F=- k1v(t),* де *k1>0* (знак мінус вказує на те, що сила опору води направлена проти швидкості руху човна). Підставивши це значення *F* в рівняння (7)і позначивши *m k1 = k,* отримаємо диференціальне рівняння

*v’(t)=- kv(t), k>0*,

аналогічно рівнянню (1).За формулою (5)знайдемо його розв’язок при початковій умові (8):

.

Використовуючи додаткову умову *v(4)=1 м/с*, знайдемо



ось чому  - це закон зміни швидкості руху човна після зупинки мотору. Для відповіді на питання потрібно розв’язати рівняння *v(t)=0,04* відносно *t*. Розв’язавши його отримаємо, що *t=12с.*

Ми розглянули якісно *різноманітні* фізичні явища, при дослідженні яких потрібно розв’язувати *аналогічні* диференціальні рівняння першого порядку. Ця обставина має не тільки філософське значення, підтверджуючи єдність природи, підкреслюючи чинність математичних засобів в природознавстві. Воно має і велике практичне значення. Аналогічність диференціальних рівнянь,застосованих до різноманітних явищ життя, призвела до виникнення важливого засобу розв'язування практичних задач – засобу *математичного моделювання.* Диференційне рівняння, яке виникло при розгляді якої-небудь технічної задачі, *моделюють,* наприклад, електричним приладом, а саме конструюють такий електроприлад, робота якого описується *тим же* диференціальним рівнянням, що і технічний об'єкт. Спостерігаючи за роботою електроприладу, ми зуміємо судити про поведінку цієї функції. Наприклад, нехай деяка механічна система складається з валу, що через пружину і маховик, повантажений в в’язку рідину, передає обертання іншому валу, жорстко зв'язаному з маховиком. Для вивчення роботи цієї системи конструюється інша система – електрична, що складається з джерела EPC, з'єднаного через котушку індуктивності, конденсатор і активний опір з лічильником електричної енергії. При цьому можна так підібрати значення індуктивності, ємності і опору, щоб вони певним чином відповідали пружності пружини, інерції маховика і тертю рідини. При такій відповідності обидві системи будуть описуватися *одним і тим же* диференціальним рівнянням. В результаті, вимірюючи силу струму і величину напруги, можна судити про роботу першої (механічної) системи.

**Література:**

1. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10-11 класів середніх закладів освіти. Київ : 1998.
2. Вигодский М.Я. Довідник з математики. Москва : 1991.
3. Журнал “Математика в школі”. Москва : 1979 і 1982.
4. Мясников Б.М. Навчальні допоміжні матеріали з фізики. Москва : 1985.

**Науковий керівник:**

викладач Дрогобицький механіко-технологічний коледж Берегуляк Оксана Романівна.